第 11 講
楕円 入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡としての「楕円」の定義を理解する
- 楕円の標準形と，焦点・長軸・短軸・頂点の関係を把握する
- 条件から楕円の方程式を決定できるようになる

2　要点整理

楕円の定義

解説

平面上において，2 つの定点 F, F' からの距離の和が一定である点 P の軌跡を**楕円**という。この 2 点 F, F' を楕円の**焦点**という。

- 焦点を通る直線が楕円と交わる線分：**長軸（ちょうじく）**
- 長軸の垂直二等分線が楕円と交わる線分：**短軸（たんじく）**
- 長軸と短軸の交点：**楕円の中心**
- 楕円と軸の交点：**頂点**

楕円の標準形（焦点が x 軸上の場合）

導出

2 焦点 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a > c > 0)$ である点 $P(x, y)$ の軌跡を求める。

$$PF + PF' = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

一方を移項して 2 乗し，整理を繰り返すと，

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$b^2 = a^2 - c^2\ (b > 0)$ とおいて両辺を a^2b^2 で割ると，

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)}$$

焦点： $(c, 0),\ (-c, 0)$，ただし $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

頂点： $(\pm a,\ 0),\ (0, \pm b)$

長軸の長さ： $2a$，短軸の長さ：$2b$，距離の和：$2a$

楕円の標準形（焦点が y 軸上の場合）

解説

焦点が y 軸上にある縦長の楕円の方程式は $b > a > 0$ として，

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)}$$

焦点： $(0, c),\ (0, -c)$，ただし $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

長軸の長さ： $2b$，短軸の長さ：$2a$，距離の和：$2b$

ワンポイントアドバイス！

楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を見たら，まず **a^2 と b^2 のどちらが大きいか**を確認せよ。x^2 の分母が大きければ横長（焦点が x 軸上），y^2 の分母が大きければ縦長（焦点が y 軸上）である。焦点の c は常に「$\sqrt{\text{大きい方の分母} - \text{小さい方の分母}}$」と覚えるとミスが減る。

3 例題

問題 1

問題

楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ について，焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

解説

$a^2=25,\ b^2=9$ より $a=5,\ b=3$。$a>b$ なので横長（焦点は x 軸上)。

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

長軸の長さ $2a=10$，短軸の長さ $2b=6$。

答え

焦点：$(4,0),\ (-4,0)$

長軸の長さ：10，短軸の長さ：6

問題 2

問題

2 つの定点 $(0,2),\ (0,-2)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

解説

焦点が y 軸上にあるので縦長。$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$ とおく。
$c=2$ より $b^2-a^2=4\cdots$①
距離の和 $2b=6 \implies b=3 \implies b^2=9$
①に代入して $9-a^2=4 \implies a^2=5$

答え

$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$

問題 3

問題

2 点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ を頂点とし，点 $(2, 3)$ を通る楕円の方程式を求めよ。

解説

頂点が $(\pm 4, 0)$ なので $a = 4$, $a^2 = 16$。方程式を $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおく。
点 $(2, 3)$ を代入する。

$$\frac{4}{16} + \frac{9}{b^2} = 1 \implies \frac{1}{4} + \frac{9}{b^2} = 1 \implies \frac{9}{b^2} = \frac{3}{4} \implies b^2 = 12$$

答え

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

4　演習問題

問題 1

次の楕円の焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}=1$

(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

問題 2

方程式 $9x^2+25y^2=225$ が表す楕円について，焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

問題 3

方程式 $4x^2+y^2=4$ が表す楕円の焦点の座標を求めよ。

問題 4

次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1) 焦点が $(3,0)$, $(-3,0)$ であり，焦点からの距離の和が 10

(2) 焦点が $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$ であり，焦点からの距離の和が 6

問題 5

焦点が $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$ であり，短軸の長さが 4 である楕円の方程式を求めよ。

問題 6

2 つの頂点が $(0,5)$, $(0,-5)$ であり，点 $(2,\sqrt{5})$ を通る楕円の方程式を求めよ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

(1)　$a^2 = 36,\ b^2 = 11$ より $a = 6,\ b = \sqrt{11}$。$a > b$ なので x 軸上に焦点。

$$c = \sqrt{36 - 11} = \sqrt{25} = 5$$

長軸 $2a = 12$，短軸 $2b = 2\sqrt{11}$。

(2)　$a^2 = 4,\ b^2 = 16$ より $a = 2,\ b = 4$。$b > a$ なので y 軸上に焦点。

$$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

長軸 $2b = 8$，短軸 $2a = 4$。

答え

(1)　焦点：$(5, 0),\ (-5, 0)$，長軸：12，短軸：$2\sqrt{11}$

(2)　焦点：$(0, 2\sqrt{3}),\ (0, -2\sqrt{3})$，長軸：8，短軸：4

問題 2

解説

両辺を 225 で割って標準形にする。

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 25,\ b^2 = 9$ より $a = 5,\ b = 3$。$a > b$ なので x 軸上に焦点。$c = \sqrt{25 - 9} = 4$，長軸 $2a = 10$，短軸 $2b = 6$。

答え

焦点：$(4, 0),\ (-4, 0)$，長軸の長さ：10，短軸の長さ：6

ワンポイントアドバイス！

$Ax^2 + By^2 = C$ の形を与えられたら，必ず両辺を C で割って右辺を 1 にすること。それが標準形をつくり，焦点や軸の長さを正しく読み取るための第一歩である。

問題 3

解説

両辺を 4 で割ると $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$，すなわち $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$。
$a^2 = 1$, $b^2 = 4$。$b > a$ なので y 軸上に焦点。$c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$。

答え

$(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$

問題 4

解説

(1)　焦点が x 軸上 $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$。
距離の和 $2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$。
$c = 3$ より $a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$。

(2)　焦点が y 軸上 $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (b > a > 0)$。
距離の和 $2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$。
$c = \sqrt{5}$ より $b^2 - a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4$。

答え

(1)　$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2)　$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

問題 5

解説

焦点が x 軸上なので横長。$c = \sqrt{2}$，短軸の長さ $2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$。

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 2 = 6$$

答え

$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$

問題 6

解説

頂点が $(0, \pm 5)$ なので $b = 5,\ b^2 = 25$。方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ とおく。
点 $(2, \sqrt{5})$ を代入する。

$$\frac{4}{a^2} + \frac{5}{25} = 1 \implies \frac{4}{a^2} + \frac{1}{5} = 1 \implies \frac{4}{a^2} = \frac{4}{5} \implies a^2 = 5$$

答え

$\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

6 仕上げチェック

確認リスト

1. 楕円の定義「2 点からの距離の和が一定」を正しく理解したか。
2. 標準形から，焦点の座標や長軸・短軸の長さをすぐに導き出せるようになったか。
3. x^2 と y^2 の分母の大小関係から，楕円の向き（横長か縦長か）を判断できるか。
