第 9 講
空間における直線・平面・球の方程式 入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 空間における直線の方程式（媒介変数表示と対称式）を理解する
- 空間における平面の方程式（法線ベクトルを用いた表現）を使えるようになる
- 球面の方程式（中心と半径、直径の両端）を立てられるようになる
- 直線と平面の交点を媒介変数を用いて求められるようになる

2　要点整理

空間における直線の方程式

導出

定点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d} = (l, m, n)$ に平行な直線のベクトル方程式は，

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

成分で表すと媒介変数表示になる。

$$x = x_1 + tl, \quad y = y_1 + tm, \quad z = z_1 + tn$$

l, m, n がいずれも 0 でないとき，各式を t について解いて等置すると，

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$

空間における平面の方程式

導出

定点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面上の点 $P(x, y, z)$ について，$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ より $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$。成分を代入して，

$$\boxed{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

整理すると $ax + by + cz + d = 0$ の形になり，係数の組 (a, b, c) が法線ベクトルを表す。

ワンポイントアドバイス！

平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ において，x, y, z の係数の組 (a, b, c) はそのままその平面の**法線ベクトル**を表している。直線の方程式 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルが (a, b) であることの自然な拡張である。

球面の方程式（中心と半径）

導出

点 $C(a, b, c)$ を中心，半径 r $(r > 0)$ の球面上の点 $P(x, y, z)$ について，$|CP| = r$ より両辺を 2 乗すると，

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

球面の方程式（直径の両端）

導出

異なる 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を直径の両端とする球面上の点 $P(\vec{p})$ については，線分 AB が直径であることから $\angle APB = 90^\circ$，すなわち $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ が成り立つ。よって，

$$\boxed{(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0}$$

3　例題

問題 1

問題

点 $A(2,-1,3)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(4,5,-2)$ に平行な直線の方程式を求めよ。

解説

通る点 $(x_1,y_1,z_1)=(2,-1,3)$，方向ベクトル $(l,m,n)=(4,5,-2)$ を公式に代入する。

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-(-1)}{5}=\frac{z-3}{-2}$$

答え

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{-2}$$

問題 2

問題

点 $A(1,2,-4)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(3,-1,2)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

解説

法線ベクトル $(a,b,c)=(3,-1,2)$，通る点 $(x_1,y_1,z_1)=(1,2,-4)$ を公式に代入して展開する。

$$\begin{aligned} 3(x-1)-1(y-2)+2(z+4)&=0\\ 3x-3-y+2+2z+8&=0\\ 3x-y+2z+7&=0 \end{aligned}$$

答え

$3x-y+2z+7=0$

問題 3

問題

方程式 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ はどのような図形を表すか。

解説

各変数について平方完成を行い，標準形に変形する。

$$
\begin{aligned}
&(x^2-4x)+(y^2+6y)+(z^2-2z)+5=0\\
&\{(x-2)^2-4\}+\{(y+3)^2-9\}+\{(z-1)^2-1\}+5=0\\
&(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2-9=0\\
&(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9=3^2
\end{aligned}
$$

答え

中心 $(2,-3,1)$，半径 3 の球面

4 演習問題

問題 1

点 $A(-3,4,0)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(2,-1,3)$ に平行な直線の方程式を求めよ。

問題 2

2 点 $A(1,2,3)$, $B(4,0,5)$ を通る直線の方程式を求めよ。

問題 3

点 $A(2,-3,1)$ を通り，平面 $4x-y+5z-2=0$ に平行な平面の方程式を求めよ。

問題 4

中心が $C(3,-1,2)$ で，原点 $O(0,0,0)$ を通る球面の方程式を求めよ。

問題 5

方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-8y+4z-4=0$ が表す球面の中心の座標と半径を求めよ。

問題 6

2 点 $A(4,-1,3)$, $B(-2,5,1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

問題 7

点 $A(1,2,-1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(2,1,-2)$ に平行な直線 ℓ と，平面 $\alpha: x+2y-z-11=0$ との交点 P の座標を求めよ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

公式にそのまま代入する。z 成分の分子は $z - 0 = z$ となる。

答え

$\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{3}$

問題 2

解説

方向ベクトルを $\overrightarrow{AB}$ として求める。

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (4-1,\ 0-2,\ 5-3) = (3, -2, 2)$$

点 $A(1, 2, 3)$ を通り，方向ベクトル $(3, -2, 2)$ の直線である。

答え

$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$

問題 3

解説

平行な平面は法線ベクトルを共有する。与えられた平面の法線ベクトルは $\vec{n} = (4, -1, 5)$。
点 $A(2, -3, 1)$ を通る平面の方程式は,

$$\begin{aligned} 4(x-2) - (y+3) + 5(z-1) &= 0 \\ 4x - 8 - y - 3 + 5z - 5 &= 0 \\ 4x - y + 5z - 16 &= 0 \end{aligned}$$

答え

$4x - y + 5z - 16 = 0$

問題 4

解説

半径 r は中心 $C(3,-1,2)$ と原点 O の距離に等しい。

$$r^2 = 3^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9 + 1 + 4 = 14$$

答え

$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$

問題 5

解説

平方完成を行う。

$$\begin{aligned}&\{(x+1)^2 - 1\} + \{(y-4)^2 - 16\} + \{(z+2)^2 - 4\} - 4 = 0\\&(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 25 = 5^2\end{aligned}$$

答え

中心 $(-1,4,-2)$，半径 5

問題 6

解説

中心は線分 AB の中点であるから，

$$C = \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1,2,2)$$

半径の 2 乗は中心 C と点 A の距離の 2 乗である。

$$r^2 = (4-1)^2 + (-1-2)^2 + (3-2)^2 = 9 + 9 + 1 = 19$$

答え

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 19$

ワンポイントアドバイス！

直径の両端が与えられた場合，内積の公式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$ を展開して整理しても正解にたどり着けるが，「中点＝中心，距離＝半径」で標準形を作る方が計算ミスが少なく早い。状況に応じて使い分けよう。

問題 7

解説

点 P は直線 ℓ 上にあるから，媒介変数 t を用いて，

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(2, 1, -2) = (1 + 2t,\ 2 + t,\ -1 - 2t)$$

点 P は平面 α 上にもあるから，$x + 2y - z - 11 = 0$ に代入する。

$$\begin{aligned}(1 + 2t) + 2(2 + t) - (-1 - 2t) - 11 &= 0\\ 1 + 2t + 4 + 2t + 1 + 2t - 11 &= 0\\ 6t - 5 &= 0 \implies t = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

各座標を求める。

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2 \times \frac{5}{6} = \frac{8}{3}\\ y &= 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}\\ z &= -1 - 2 \times \frac{5}{6} = -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

答え

$P\left(\frac{8}{3}, \frac{17}{6}, -\frac{8}{3}\right)$

6　仕上げチェック

確認リスト

1. 直線の方向ベクトルや平面の法線ベクトルを用いて，素早く方程式を立てることができるか。
2. 平面の方程式の係数から，直ちに法線ベクトルを読み取ることができるか。
3. 球面の一般形を平方完成して，中心と半径を正しく求めることができるか。