第 8 講
位置ベクトルと図形への応用（空間）入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 空間における位置ベクトルと内分点・外分点の公式を使えるようになる
- 四面体の重心の位置ベクトルを導出・応用できるようになる
- 4 点が同一平面上にある条件（共面条件）を理解する
- 空間図形における直線と平面の交点の求め方をマスターする

2　要点整理

空間における内分点・外分点の位置ベクトル

解説

空間においても，基準点 O を定めると平面のときと全く同じ公式が成り立つ。2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(\vec{p})$，外分する点 $Q(\vec{q})$ の位置ベクトルは以下の通りである。

内分点： $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

外分点： $\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

中点： $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

四面体の重心の位置ベクトル

導出

4 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ の重心を $G(\vec{g})$ とする。
三角形 BCD の重心 G_1 の位置ベクトルは，

$$\vec{g}_1=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

四面体の重心 G は，頂点 A と対面の重心 G_1 を結ぶ線分 AG_1 を $3:1$ に内分する点だから，

$$\vec{g} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{g}_1}{4} = \frac{\vec{a} + 3 \cdot \dfrac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}}{4}$$

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}}$$

4 点が同一平面上にある条件（共面条件）

導出

空間内の異なる 4 点 A, B, C, P について，3 点 A, B, C が一直線上にないとする。点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，実数 s, t を用いて，

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}}$$

と表せることである。位置ベクトルで表すと，$u = 1 - s - t$ とおいて，

$$\vec{p} = u\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (u + s + t = 1)$$

すなわち，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **の係数の和が** 1 になることが，点 P が平面 ABC 上にある条件である。

ワンポイントアドバイス！

空間図形の最頻出問題は「直線と平面の交点」を求める問題である。交点 P は，**「直線上にある」**という条件と，**「平面上にある（係数の和が** 1)」という 2 つの条件を同時に満たす。この 2 つの式を立てて連立方程式を解くのが最強の解法パターンである。

3　例題

問題 1

問題

4 点 $A(2,1,4)$, $B(-1,3,2)$, $C(3,0,-1)$, $D(0,4,3)$ を頂点とする四面体 $ABCD$ の重心 G の座標を求めよ。

解説

四面体の重心の公式を各成分に適用する。

$$x = \frac{2+(-1)+3+0}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$y = \frac{1+3+0+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$
$$z = \frac{4+2+(-1)+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

答え

$G(1,2,2)$

問題 2

問題

4 点 $A(1,1,0)$, $B(3,2,-1)$, $C(0,3,1)$, $D(-1,y,2)$ が同一平面上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

解説

共面条件より，実数 s, t を用いて $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と表せる。

$$\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,2,1)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-2,y-1,2)$$

各成分を比較する。

$$x \text{ 成分：}\quad 2s - t = -2 \quad \cdots①$$
$$z \text{ 成分：}\quad -s + t = 2 \quad \cdots③$$

①と③を辺々足すと $s = 0$。③に代入して $t = 2$。
これらを y 成分の式 $y - 1 = s + 2t$ に代入する。

$$y - 1 = 0 + 2 \times 2 = 4 \implies y = 5$$

答え

$y = 5$

ワンポイントアドバイス！

共面条件の成分計算では，必ず「定数だけで構成された成分」から s と t を先に求め，求まった値を未知数を含む成分の式に代入するという流れになる。手順を守れば機械的に解ける。

問題 3

問題

四面体 $OABC$ において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を D，辺 OB の中点を E，辺 OC を $1:2$ に内分する点を F とする。三角形 DEF の重心を G とし，直線 OG と平面 ABC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
まず D, E, F の位置ベクトルを求める。

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$$

三角形 DEF の重心 G の位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c}$$

点 P は直線 OG 上にあるから，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=\frac{2k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{9}\vec{c} \quad \cdots ①$$

点 P は平面 ABC 上にあるから，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数の和が 1 になる。

$$\frac{2k}{9}+\frac{k}{6}+\frac{k}{9}=1$$

分母を 18 に揃えると，

$$\frac{4k}{18}+\frac{3k}{18}+\frac{2k}{18}=\frac{9k}{18}=\frac{k}{2}=1 \implies k=2$$

①に $k=2$ を代入して，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

答え

$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

4　演習問題

問題 1

空間内の 2 点 $A(2,-1,3)$, $B(-4,5,0)$ について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点 P

(2) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 Q

(3) 線分 AB の中点 M

問題 2

4 点 $A(0,1,2)$, $B(2,-1,1)$, $C(3,2,-1)$, $D(7,x,-3)$ が同一平面上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

問題 3

四面体 $ABCD$ において，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とするとき，四角形 $PQRS$ は平行四辺形であることをベクトルを用いて証明せよ。

問題 4

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。点 P が $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$ で与えられているとき，点 P は平面 ABC 上にあるか。理由とともに答えよ。

問題 5

四面体 $OABC$ において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，線分 CD を $3:2$ に内分する点を E とする。直線 OE と平面 ABC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

成分ごとに公式を適用する。

(1)　$x = \dfrac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{3} = -2$,　$y = \dfrac{1 \times (-1) + 2 \times 5}{3} = 3$,　$z = \dfrac{1 \times 3 + 2 \times 0}{3} = 1$

(2)　$x = \dfrac{-2 \times 2 + 3 \times (-4)}{1} = -16$,　$y = \dfrac{-2 \times (-1) + 3 \times 5}{1} = 17$,　$z = \dfrac{-2 \times 3 + 3 \times 0}{1} = -6$

(3)　$x = \dfrac{2-4}{2} = -1$,　$y = \dfrac{-1+5}{2} = 2$,　$z = \dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2}$

答え

(1)　$P(-2, 3, 1)$

(2)　$Q(-16, 17, -6)$

(3)　$M\left(-1, 2, \dfrac{3}{2}\right)$

問題 2

解説

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1),\quad \overrightarrow{AC} = (3, 1, -3),\quad \overrightarrow{AD} = (7, x-1, -5)$$

共面条件より $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とおくと，

$$\begin{aligned} x \text{ 成分：}&\quad 2s + 3t = 7 \quad \cdots ① \\ z \text{ 成分：}&\quad -s - 3t = -5 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①と③を辺々足すと $s = 2$。③に代入して $-2 - 3t = -5 \implies t = 1$。

y 成分の式 $x - 1 = -2s + t$ に代入する。

$$x - 1 = -2 \times 2 + 1 = -3 \implies x = -2$$

答え

$x = -2$

問題 3

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とし（A を基準），各中点の位置ベクトルを求める。

$$\vec{p}=\frac{\vec{b}}{2},\quad \vec{q}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{r}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\quad \vec{s}=\frac{\vec{d}}{2}$$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ を示す。

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}=\frac{\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{SR}=\vec{r}-\vec{s}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{d}}{2}=\frac{\vec{c}}{2}$$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ が成り立つので，四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。

答え

（証明終）

問題 4

解説

点 P が平面 ABC 上にある条件は，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数の和が 1 になることである。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

係数の和がちょうど 1 であるため，点 P は平面 ABC 上にある。

答え

点 P は平面 ABC 上にある。（理由：$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数の和が $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ となるため。）

問題 5

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
点 D は辺 AB を $2:1$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

点 E は線分 CD を $3:2$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}}{5}=\frac{2\vec{c}+3\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)}{5}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{5}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

点 P は直線 OE 上にあるから，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OE} = \frac{k}{5}\vec{a} + \frac{2k}{5}\vec{b} + \frac{2k}{5}\vec{c}$$

点 P は平面 ABC 上にあるから，係数の和が 1。

$$\frac{k}{5} + \frac{2k}{5} + \frac{2k}{5} = \frac{5k}{5} = k = 1$$

よって $k = 1$ を代入して，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

答え

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$

6　仕上げチェック

確認リスト

1. 平面のときと同様に，空間でも内分・外分の公式がそのまま使えることを理解できたか。
2. 四面体の重心の公式（4 頂点の位置ベクトルの平均）を覚えたか。
3. 直線と平面の交点を求める際，「係数の和が 1」という条件を正しく使いこなせるようになったか。