第 7 講
空間ベクトルの内積 入門

1 この講で学ぶこと

学習目標

- 空間ベクトルの内積の定義を理解する
- 成分を用いた空間ベクトルの内積を計算できるようになる
- 空間ベクトルのなす角を求められるようになる
- 空間におけるベクトルの垂直条件を活用できるようになる

2 要点整理

空間ベクトルの内積の定義

解説

空間ベクトルにおいても，内積の定義は平面ベクトルと全く同じである。$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で，そのなす角を θ $(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ とするとき，

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta}$$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

成分による内積

解説

空間ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は，各成分の積の和で表される。平面ベクトルの式に z 成分の積が加わっただけである。

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

空間ベクトルのなす角

解説

内積の定義式から $\cos\theta$ を求める公式も，平面のときと同様に成り立つ。

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

成分表示を用いると，

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

垂直条件と平行条件

解説

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，

1. **垂直条件**：$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
   成分では $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
2. **平行条件**：実数 k を用いて $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b}$

ワンポイントアドバイス！

空間図形の問題において，「角度」や「垂直」が問われたら，迷わず「**適当な始点を決めてベクトルを設定し，内積を計算する**」という方針をとろう。図形を立体的に思い浮かべるのが苦手でも，成分を計算するだけで機械的に答えが出せるのが空間ベクトルの強みである。

3　例題

問題 1

問題

$\vec{a} = (2, -1, 3)$，$\vec{b} = (-3, 2, 4)$ のとき，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

解説

成分による内積の公式を用いる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + (-1) \times 2 + 3 \times 4 = -6 - 2 + 12 = 4$$

答え

4

問題 2

問題

$\vec{a} = (1, 1, 0)$，$\vec{b} = (0, 1, 1)$ のなす角 θ を求めよ。

解説

内積・大きさをそれぞれ求める。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

公式に代入すると，

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より，$\theta = 60^\circ$。

答え

60°

問題 3

問題

$\vec{a} = (x, 2, -1)$，$\vec{b} = (3, x, 4)$ が垂直になるように，実数 x の値を定めよ。

解説

$\vec{a} \perp \vec{b}$ より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$。内積を計算して方程式を立てる。

$$3x + 2x + (-1) \times 4 = 0$$

$$5x - 4 = 0 \implies x = \frac{4}{5}$$

答え

$x = \dfrac{4}{5}$

4 演習問題

問題 1

次の 2 つのベクトルの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(4,1,-2)$

(2) $\vec{a}=(-1,5,0)$, $\vec{b}=(3,2,7)$

問題 2

1 辺の長さが 2 の立方体 $ABCD$-$EFGH$ がある。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH}$

問題 3

次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\sqrt{3},0)$

(2) $\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{b}=(4,3,-5)$

問題 4

3 点 $A(1,0,2)$, $B(2,-1,4)$, $C(3,1,1)$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle A$ における cos の値を求めよ。

問題 5

$\vec{a}=(x,1,-2)$ と $\vec{b}=(x,x,3)$ が垂直になるように，実数 x の値を求めよ。

問題 6

$\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(-1,1,0)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{x}$ を求めよ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times 4 + (-3)\times 1 + 1\times(-2) = 8 - 3 - 2 = 3$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-1)\times 3 + 5\times 2 + 0\times 7 = -3 + 10 + 0 = 7$

答え

(1)　3　　(2)　7

問題 2

解説

立方体の図形的性質からなす角を求める。

(1)　$AB \perp AD$ であるから，なす角は 90°。よって内積は 0。

(2)　正方形 $ABCD$ を考える。$AB = 2$，$AC = 2\sqrt{2}$，$\angle BAC = 45^\circ$ より，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 2\sqrt{2}\times\cos 45^\circ = 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

(3)　三角形 AFH は 1 辺 $2\sqrt{2}$ の正三角形。$\angle FAH = 60^\circ$ より，

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH} = 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\cos 60^\circ = 8\times\frac{1}{2} = 4$$

答え

(1)　0　　(2)　4　　(3)　4

ワンポイントアドバイス！

問題 2 のように立体図形が与えられた場合，「図形的に角度を求める」か「頂点に座標を設定して成分で計算する」かの 2 つのアプローチがある。どちらでも解けるようにしておくと，検算にも使えて便利である。

問題 3

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}-\sqrt{3}+0=0$

内積が 0 であるから垂直。よって $\theta=90°$。

(2)　内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4+(-1)\times3+(-2)\times(-5)=8-3+10=15$

大きさ：$|\vec{a}|=\sqrt{4+1+4}=3,\quad |\vec{b}|=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{15}{3\times5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\theta=45°$。

答え

(1)　$90°$　　(2)　$45°$

問題 4

解説

$\angle A$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角である。

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,2),\qquad \overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$$

内積：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2-1-2=-1$

大きさ：$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6},\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$$\cos A=\frac{-1}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\frac{1}{6}$$

答え

$\cos A=-\dfrac{1}{6}$

問題 5

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，

$$x\cdot x+1\cdot x+(-2)\cdot3=0$$

$$x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0\implies x=-3,\ 2$$

答え

$x = -3,\ 2$

問題 6

解説

$\vec{x} = (x, y, z)$ とおく。

$\vec{a} \perp \vec{x}$ より，$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$：

$$x + 2y - z = 0 \quad \cdots ①$$

$\vec{b} \perp \vec{x}$ より，$\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$：

$$-x + y = 0 \implies x = y \quad \cdots ②$$

②を①に代入すると，$y + 2y - z = 0 \implies z = 3y$。

よって $\vec{x} = (y, y, 3y) = y(1, 1, 3)$。

大きさが 3 であるから，

$$|\vec{x}|^2 = y^2 + y^2 + 9y^2 = 11y^2 = 9 \implies y = \pm\frac{3}{\sqrt{11}} = \pm\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

$$\vec{x} = \pm\frac{3}{\sqrt{11}}(1, 1, 3) = \pm\left(\frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{9\sqrt{11}}{11}\right)$$

答え

$\vec{x} = \pm\left(\frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{9\sqrt{11}}{11}\right)$（複号同順）

6 仕上げチェック

確認リスト

1. 空間のベクトルの内積も，平面と全く同じ公式で計算できることが理解できたか。
2. 空間図形のなす角を，成分計算から $\cos\theta$ を用いて求められるか。
3. 未知のベクトルを求める際，垂直条件から連立方程式を立てて解くことができるか。