第 6 講
空間ベクトルの基本と成分表示 入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 空間座標の考え方と 2 点間の距離を理解する
- 空間におけるベクトルの定義と平面ベクトルとの共通点を把握する
- 空間ベクトルの成分表示（x, y, z の 3 成分）を使えるようになる
- 空間ベクトルの成分を用いた演算と大きさの計算ができるようになる

2　要点整理

空間座標と 2 点間の距離

解説

空間内の点は，互いに直交する 3 つの数直線（x 軸，y 軸，z 軸）を用いて表される。原点を $O(0,0,0)$ とし，空間内の任意の点 P は 3 つの実数の組 (x, y, z) で座標が定められる。
2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離は，三平方の定理を空間に拡張して，

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

空間ベクトルの基本

解説

空間においても平面の場合と全く同様に，「向き」と「大きさ」をもつ量を**空間ベクトル**と定義する。ベクトルの相等・逆ベクトル・零ベクトル $\vec{0}$ の定義は平面と同じである。加法・減法・実数倍も，図形的な意味（平行四辺形をつくる，矢印をつなぐ等）は平面ベクトルと全く同一の規則で扱うことができる。

空間ベクトルの成分表示と大きさ

解説

空間ベクトル $\vec{a}$ は x 成分・y 成分に加えて z 成分が必要になる。

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$$

このベクトルの大きさは原点 O と点 (a_1, a_2, a_3) との距離に等しいため，

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

成分による演算

解説

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，実数を k とするとき，

1. **加法**：$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$
2. **減法**：$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$
3. **実数倍**：$k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

平面ベクトルの計算に z 成分の計算が 1 つ増えるだけである。

2 点間のベクトル

解説

2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ について，「終点 − 始点」の順で成分を引くと，

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)}$$

その大きさは，

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ワンポイントアドバイス！

空間ベクトルと聞くと難しく感じるかもしれないが，数式上のルールは「**平面ベクトルの式に z 成分を書き足すだけ**」である。図形が立体になっても，代数（計算）のアプローチをとれば平面と全く同じ感覚で解くことができるのがベクトルの最大の魅力である。

3 例題

問題 1

問題

$\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 4, 0)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(2) $3\vec{a} - \vec{b}$

解説

成分ごとに平面と同じルールで計算する。

(1) $\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 3) + 2(-1, 4, 0) = (2, -1, 3) + (-2, 8, 0) = (0, 7, 3)$

(2) $3\vec{a} - \vec{b} = 3(2, -1, 3) - (-1, 4, 0) = (6, -3, 9) - (-1, 4, 0) = (7, -7, 9)$

答え

(1) $(0, 7, 3)$

(2) $(7, -7, 9)$

問題 2

問題

2 点 $A(3, 0, -2)$, $B(-1, 2, 4)$ について，$\overrightarrow{AB}$ の成分表示と，その大きさ $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

解説

「終点 − 始点」の順で計算する。

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3,\ 2 - 0,\ 4 - (-2)) = (-4, 2, 6)$$

大きさは各成分の 2 乗の和の平方根より，

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

答え

成分表示：$(-4, 2, 6)$

大きさ：$2\sqrt{14}$

4 演習問題

問題 1

$\vec{a}=(1,-2,4)$, $\vec{b}=(3,1,-1)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a}-\vec{b}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}$

(3) $-\vec{a}+2(\vec{a}-\vec{b})$

問題 2

次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,-3,6)$

(2) $\vec{b}=(-4,4,2)$

問題 3

2 点 $A(1,5,-3)$, $B(4,1,9)$ について，$\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさを求めよ。

問題 4

$\vec{a}=(2,-1,2)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分で表せ。

問題 5

$\vec{a}=(x,2,-1)$ の大きさが 3 であるとき，実数 x の値を求めよ。

問題 6

空間内の 4 点 $A(2,1,-1)$, $B(4,0,2)$, $C(3,4,5)$, $D(x,y,z)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ が平行四辺形になるとき，頂点 D の座標を求めよ。

5 演習問題の解答・解説

問題 1

解説

(1) $\vec{a}-\vec{b}=(1-3,\ -2-1,\ 4-(-1))=(-2,-3,5)$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}=(2,-4,8)+(9,3,-3)=(11,-1,5)$

(3) 式を整理すると $-\vec{a}+2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{a}-2\vec{b}$。
$(1,-2,4)-2(3,1,-1)=(1,-2,4)-(6,2,-2)=(-5,-4,6)$

答え

(1) $(-2,-3,5)$

(2) $(11,-1,5)$

(3) $(-5,-4,6)$

問題 2

解説

公式 $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いる。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

答え

(1) 7　(2) 6

問題 3

解説

「終点 − 始点」で成分を求める。

$$\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 1-5,\ 9-(-3))=(3,-4,12)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

答え

成分表示：$(3, -4, 12)$

大きさ：13

問題 4

解説

単位ベクトルは，元のベクトルをその大きさで割ることで求められる。

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

答え

$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

問題 5

解説

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 4 + 1} = 3$。両辺を 2 乗して，

$$x^2 + 5 = 9 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

答え

$x = \pm 2$

問題 6

解説

四角形 $ABCD$ が平行四辺形になる条件は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$。

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2,\ 0 - 1,\ 2 - (-1)) = (2, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{DC} = (3 - x,\ 4 - y,\ 5 - z)$$

各成分を比較して，

$$\begin{aligned} 3 - x = 2 &\implies x = 1 \\ 4 - y = -1 &\implies y = 5 \\ 5 - z = 3 &\implies z = 2 \end{aligned}$$

答え

$D(1, 5, 2)$

ワンポイントアドバイス！

問題 6 のような図形問題も，空間座標だからといって身構える必要はない。平面のときと全く同じ「向かい合うベクトルが等しい」という条件式を立てるだけで正解にたどり着ける。

6　仕上げチェック

確認リスト

1. 空間の点の座標を (x, y, z) の 3 成分で正しく把握できるか。
2. 空間ベクトルの成分計算（加法・減法・実数倍）を迷わず行えるか。
3. 各成分の 2 乗の和の平方根によって，空間ベクトルの大きさを計算できるか。
