第 5 講

# ベクトル方程式（平面）入門

## 1　この講で学ぶこと

**学習目標**

- 直線のベクトル方程式（方向ベクトルと法線ベクトル）を理解する
- 異なる 2 点を通る直線のベクトル方程式を導出・活用できる
- 円のベクトル方程式（中心と半径、直径の両端）を使えるようになる
- ベクトル方程式が表す図形の意味を読み取れるようになる

## 2　要点整理

### 直線のベクトル方程式（方向ベクトル）

**導出**

定点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を $g$ とする。直線 $g$ 上の点 $P(\vec{p})$ については，$\overrightarrow{AP}$ が $\vec{d}$ の実数倍で表せるから，

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ を代入すると，

$$\boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}}$$

ここで実数 $t$ を**媒介変数（パラメータ）**，$\vec{d}$ をこの直線の**方向ベクトル**という。

### 異なる 2 点を通る直線のベクトル方程式

**導出**

異なる 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線は，点 $A$ を通り方向ベクトル $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ をもつ直線とみなす。方向ベクトルの公式に代入すると，

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\boxed{\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}}$$

$s = 1 - t$ とおくと，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s + t = 1)$ という形でも表せる。

**ワンポイントアドバイス！**

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ は，前講の「内分点・外分点の位置ベクトル」の式そのものである。$0<t<1$ のとき線分 $AB$ の内分点，$t<0$ や $1<t$ のとき外分点を表す。つまり，$t$ が全ての実数を動くことで，直線全体を描くことができる。

## 直線のベクトル方程式（法線ベクトル）

**導出**

定点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線上の点 $P(\vec{p})$ を考える。$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ より内積が 0 になるから，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$ を代入して，

$$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0}$$

このとき，$\vec{n}$ をこの直線の**法線ベクトル**という。（点 $P$ が点 $A$ に一致する場合も $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ なので内積は 0 となり，式に含まれる。）

## 円のベクトル方程式（中心と半径）

**導出**

中心 $C(\vec{c})$，半径 $r$ $(r>0)$ の円周上の点 $P(\vec{p})$ について，円の定義「中心からの距離が半径に等しい」から，$|\overrightarrow{CP}|=r$。$\overrightarrow{CP}=\vec{p}-\vec{c}$ を代入して，

$$\boxed{|\vec{p}-\vec{c}|=r}$$

## 円のベクトル方程式（直径の両端）

**導出**

異なる 2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を直径の両端とする円周上の点 $P(\vec{p})$ を考える。直径に対する円周角は $90^\circ$ であるから，$\angle APB=90^\circ$，すなわち $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$。

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BP}=\vec{p}-\vec{b}$ を代入して，

$$\boxed{(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0}$$

（点 $P$ が $A$ または $B$ に一致するときも内積は 0 となり，式に含まれる。）

## 3　例題

### 問題 1

**問題**

点 $A(2,1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(3,-1)$ に平行な直線を媒介変数 $t$ を用いて表せ。また，$t$ を消去して $x,\,y$ の方程式を求めよ。

**解説**

直線上の点を $P(x,y)$ とすると，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ より，

$$(x,y)=(2,1)+t(3,-1)=(2+3t,\ 1-t)$$

これが媒介変数表示である。次に $t$ を消去する。

$$x=2+3t\quad\cdots①,\qquad y=1-t\quad\cdots②$$

②より $t=1-y$。これを①に代入すると，

$$x=2+3(1-y)=5-3y$$

$$x+3y-5=0$$

**答え**

媒介変数表示：$x=2+3t,\quad y=1-t$

$x,y$ の方程式：$x+3y-5=0$

### 問題 2

**問題**

点 $A(-1,4)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(2,5)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

**解説**

直線上の点を $P(x,y)$ とし，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ を用いる。

$$\vec{p}-\vec{a}=(x+1,\ y-4)$$

内積をとって，

$$2(x+1)+5(y-4)=0$$

$$2x+2+5y-20=0$$

$$2x+5y-18=0$$

**答え**

$2x + 5y - 18 = 0$

**ワンポイントアドバイス！**

直線 $ax + by + c = 0$ において，係数の組 $(a, b)$ はその直線の**法線ベクトル**を表している。問題 2 の答え $2x + 5y - 18 = 0$ の $x$, $y$ の係数 $(2, 5)$ が，問題文で与えられた法線ベクトルと一致することを確認しよう。

## 問題 3

**問題**

2 点 $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

**解説**

円周上の点を $P(x, y)$ とし，$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ を用いる。

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - 3,\ y - 2), \qquad \vec{p} - \vec{b} = (x + 1,\ y - 4)$$

内積をとって，

$$(x - 3)(x + 1) + (y - 2)(y - 4) = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3) + (y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

（標準形に変形すると $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ となる。）

**答え**

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

## 4　演習問題

### 問題 1

点 $A(-3,2)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(4,1)$ に平行な直線を媒介変数 $t$ を用いて表せ。また，$t$ を消去して $x$, $y$ の方程式を求めよ。

### 問題 2

2 点 $A(1,3)$, $B(4,-2)$ を通る直線を，ベクトル方程式を用いて求めよ（$x$, $y$ の方程式で答えよ）。

### 問題 3

点 $A(5,-1)$ を通り，直線 $3x-2y+4=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

### 問題 4

平面上の点 $P(\vec{p})$ が，定点 $A(\vec{a})$ に対して $|\vec{p}-\vec{a}|=3$ を満たしながら動くとき，点 $P$ はどのような図形を描くか。

### 問題 5

定点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ と動点 $P(\vec{p})$ について，次のベクトル方程式が表す図形は何か。

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=4$$

### 問題 6

定点 $A(1,1)$, $B(5,-3)$ に対し，動点 $P(x,y)$ がベクトル方程式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ を満たすとき，点 $P$ が描く図形の方程式を求めよ。

## 5　演習問題の解答・解説

### 問題 1

**解説**

$(x, y) = (-3 + 4t,\ 2 + t)$ が媒介変数表示。

$y = 2 + t$ より $t = y - 2$。これを $x = -3 + 4t$ に代入すると，

$$x = -3 + 4(y - 2) = -11 + 4y$$

$$x - 4y + 11 = 0$$

**答え**

媒介変数表示：$x = -3 + 4t, \quad y = 2 + t$

方程式：$x - 4y + 11 = 0$

### 問題 2

**解説**

方向ベクトル $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (3,\ -5)$。点 $A(1, 3)$ を通るから，

$$(x, y) = (1 + 3t,\ 3 - 5t)$$

$t$ を消去するために，$t = \dfrac{x - 1}{3}$ と $t = \dfrac{3 - y}{5}$ を等置すると，

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{3 - y}{5}$$

両辺を 15 倍して，$5(x - 1) = 3(3 - y)$，つまり $5x + 3y - 14 = 0$。

**答え**

$5x + 3y - 14 = 0$

### 問題 3

**解説**

直線 $3x - 2y + 4 = 0$ の法線ベクトルは $\vec{n_1} = (3, -2)$。

求める直線はこの直線に垂直だから，方向ベクトルを $\vec{d} = (3, -2)$ とすればよい。

点 $(5, -1)$ を通り方向ベクトル $(3, -2)$ の媒介変数表示から $t$ を消去する。$x = 5 + 3t$ の両辺を

2 倍，$y = -1 - 2t$ の両辺を 3 倍して足すと，

$$2x + 3y = 10 - 3 = 7$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$

**答え**

$2x + 3y - 7 = 0$

### 問題 4

**解説**

$|\vec{p} - \vec{c}| = r$ は中心 $C(\vec{c})$，半径 $r$ の円を表す。$|\vec{p} - \vec{a}| = 3$ と比較すると，中心が $A(\vec{a})$，半径が 3 である。

**答え**

点 $A$ を中心とする半径 3 の円

### 問題 5

**解説**

$\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ は線分 $AB$ の中点の位置ベクトル（中点を $M$ とする）。与式は $|\vec{p} - \vec{m}| = 4$ となり，これは点 $M$ を中心とする半径 4 の円を表す。

**答え**

線分 $AB$ の中点を中心とする半径 4 の円

**ワンポイントアドバイス！**

ベクトル方程式の問題では，$\vec{p}$ を除いた定数部分（$\vec{a}, \vec{b}$ などを含む部分）が「図形的にどの点を表しているか」を読み取るのがコツである。

### 問題 6

**解説**

与式は 2 点 $A(1, 1)$, $B(5, -3)$ を直径の両端とする円のベクトル方程式。

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - 1,\ y - 1), \qquad \vec{p} - \vec{b} = (x - 5,\ y + 3)$$

内積をとって，

$$(x-1)(x-5)+(y-1)(y+3)=0$$

$$(x^2-6x+5)+(y^2+2y-3)=0$$

$$x^2+y^2-6x+2y+2=0$$

（平方完成すると $(x-3)^2+(y+1)^2=8$）

**答え**

$x^2+y^2-6x+2y+2=0$

## 6　仕上げチェック

**確認リスト**

1. 直線を「通る点と方向」または「通る点と垂直な方向」で式に表せるようになったか。
2. 直線の方程式 $ax+by+c=0$ から法線ベクトル $(a,b)$ を読み取れるか。
3. 円のベクトル方程式を見て，中心の位置や半径を図形的にイメージできるか。

**お問い合わせや無料コーチングの予約はこちら！**

LINE