第 4 講
位置ベクトルと図形への応用（平面）入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 位置ベクトルの概念を理解する
- 線分の内分点・外分点の位置ベクトルを求められる
- 三角形の重心の位置ベクトルを導出・応用できる
- 3 点が一直線上にある条件（共線条件）を理解・活用できる
- 2 直線の交点の位置ベクトルを係数比較法で求められる

2　要点整理

位置ベクトルとは

解説

平面上に定点 O（基準点）を定めると，任意の点 P の位置は，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ によってただ 1 つに決まる。このとき，$\overrightarrow{OP}$ を点 O を基準とする点 P の**位置ベクトル**といい，小文字の $\vec{p}$ などで表すことが多い。点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを，$P(\vec{p})$ と表す。
2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ について，$\overrightarrow{AB}$ は位置ベクトルを用いて次のように表せる。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

線分の内分点の位置ベクトル

導出

2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。点 P は線分 AB 上にあり，$AP : PB = m : n$ を満たすので，

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$$

が成り立つ。それぞれを基準点 O からの位置ベクトルに書き直すと，

$$n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{p})$$

展開して $\vec{p}$ について整理すると，

$$(m+n)\vec{p} = n\vec{a} + m\vec{b}$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}}$$

特に，中点（1 : 1 に内分する点）の位置ベクトル $\vec{m}$ は，

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

線分の外分点の位置ベクトル

導出

線分 AB を $m : n$ に外分する点を $Q(\vec{q})$ とする（$m \neq n$）。内分点の公式の n を $-n$ に置き換えることで，

$$\boxed{\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}}$$

三角形の重心の位置ベクトル

導出

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする三角形 ABC の重心を $G(\vec{g})$ とする。重心 G は，中線 AM を 2 : 1 に内分する点である。

辺 BC の中点 M の位置ベクトルは，

$$\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

線分 AM を 2 : 1 に内分する点 G の位置ベクトルは，

$$\vec{g} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} = \boxed{\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}}$$

3 点が一直線上にある条件（共線条件）

解説

異なる 3 点 A, B, C が同一直線上にあるとき，

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \text{ は実数})$$

これは「$\overrightarrow{AC}$ が $\overrightarrow{AB}$ の実数倍で表せる」ことを意味する。

ワンポイントアドバイス！

交点の位置ベクトルを求める問題では,「2 つの直線上の点である」という 2 つの条件から式を 2 つ作り，係数を比較する解法が王道である。その際,「$\vec{a}, \vec{b}$ が $\vec{0}$ でなく，平行でもない（一次独立)」という一文を必ず答案に書く必要がある。これを書き忘れると減点されることが多いので注意せよ。

3　例題

問題 1

問題

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする三角形 ABC において，辺 BC を $3:1$ に内分する点を D，辺 AB を $2:3$ に外分する点を E，三角形 ABC の重心を G とする。点 D, E, G の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

解説

公式にそのまま当てはめる。

点 D（内分点の公式，$m=3, n=1$）：

$$\vec{d} = \frac{1\cdot\vec{b}+3\cdot\vec{c}}{3+1} = \frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$$

点 E（外分点の公式，$m=2, n=3$）：

$$\vec{e} = \frac{-3\vec{a}+2\vec{b}}{2-3} = \frac{-3\vec{a}+2\vec{b}}{-1} = 3\vec{a}-2\vec{b}$$

点 G（重心の公式）：

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

答え

D の位置ベクトル	$\dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}$
E の位置ベクトル	$3\vec{a}-2\vec{b}$
G の位置ベクトル	$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

問題 2

問題

平行四辺形 $ABCD$ において，対角線の交点を O とする。$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ とするとき，$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ が成り立つことを証明せよ。

解説

平行四辺形の対角線は互いの中点で交わる。すなわち，点 O は線分 AC の中点であり，同時に線分 BD の中点でもある。
点 O の位置ベクトルを $\vec{o}$ とすると，

$$\text{線分 } AC \text{ の中点} \Rightarrow \vec{o} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$\text{線分 } BD \text{ の中点} \Rightarrow \vec{o} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$$

よって，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$
両辺を 2 倍すると，$\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d}$ が成り立つ。

答え

（証明終）

問題 3

問題

三角形 OAB において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を C，辺 OB を $3:2$ に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

解説

点 C, D の位置ベクトルをまず求める。

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\vec{b}$$

点 P は線分 AD 上にあるので，$AP:PD=s:(1-s)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\quad\cdots①$$

また，点 P は線分 BC 上にあるので，$BP:PC=t:(1-t)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①②の係数を比較して，

$$1-s=\frac{2}{3}t\quad\cdots③$$
$$\frac{3}{5}s=1-t\quad\cdots④$$

④より $t=1-\frac{3}{5}s$。これを③に代入すると，

$$1-s=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{5}s\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}s$$
$$\frac{1}{3}=\frac{3}{5}s\implies s=\frac{5}{9}$$

①に代入して，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

答え

$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

4　演習問題

問題 1

2 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) 線分 AB を $4:3$ に内分する点 C

(2) 線分 AB を $5:2$ に外分する点 D

(3) 線分 AB の中点 M

問題 2

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする三角形 ABC において，辺 BC，辺 CA，辺 AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。三角形 LMN の重心 G' の位置ベクトルは，三角形 ABC の重心 G の位置ベクトルと一致することを証明せよ。

問題 3

3 点 $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$, $C(5,\ y)$ が同一直線上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

問題 4

三角形 OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

問題 5

四角形 $ABCD$ において，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とするとき，四角形 $PQRS$ は平行四辺形になることを，位置ベクトルを用いて証明せよ。

問題 6

三角形 ABC において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を P，辺 AC を $3:1$ に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CP の交点を R とし，直線 AR と辺 BC の交点を D とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

公式をそのまま用いる。

(1) $\vec{c} = \dfrac{3\vec{a} + 4\vec{b}}{7}$

(2) $\vec{d} = \dfrac{-2\vec{a} + 5\vec{b}}{3}$

(3) $\vec{m} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

答え

(1) $\dfrac{3\vec{a} + 4\vec{b}}{7}$

(2) $\dfrac{-2\vec{a} + 5\vec{b}}{3}$

(3) $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

問題 2

解説

点 L, M, N の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ とすると，中点の公式より，

$$\vec{l} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

三角形 LMN の重心 G' の位置ベクトル $\vec{g'}$ は，

$$\vec{g'} = \frac{\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

これは三角形 ABC の重心 G の位置ベクトルに等しい。よって，G' は G と一致する。

答え

（証明終）

問題 3

解説

$\overrightarrow{AB} = (4,\ 2),\quad \overrightarrow{AC} = (6,\ y-2)$
3 点 $A,\ B,\ C$ が同一直線上にあるので，$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

$$(6,\ y-2) = k(4,\ 2)$$

各成分を比較して，$6 = 4k \Rightarrow k = \dfrac{3}{2}$。よって，

$$y - 2 = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \implies y = 5$$

答え

$y = 5$

ワンポイントアドバイス！

共線条件は，「一方が他方の実数倍」として成分で方程式を立てるのが基本である。この計算手法は平面でも空間でも共通して役立つのでマスターしよう。

問題 4

解説

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{OD} = \dfrac{2}{3}\vec{b}$
点 P は線分 AD 上にあるので，$AP : PD = s : (1-s)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots ①$$

また，点 P は線分 BC 上にあるので，$BP : PC = t : (1-t)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \cdots ②$$

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \nparallel \vec{b}$ より係数を比較して，

$$1 - s = \frac{1}{2}t \quad \cdots ③, \qquad \frac{2}{3}s = 1 - t \quad \cdots ④$$

④より $t = 1 - \dfrac{2}{3}s$。③に代入して，

$$1 - s = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}s\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}s \implies \frac{1}{2} = \frac{2}{3}s \implies s = \frac{3}{4}$$

①に代入して，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

答え

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

問題 5

解説

点 A, B, C, D の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする。中点の公式より，

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}, \quad \vec{s} = \frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$$

四角形 $PQRS$ が平行四辺形であることを示すには，$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ を示せばよい。

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{SR} = \vec{r} - \vec{s} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{d}+\vec{a}}{2} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$$

よって $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ が成り立つので，四角形 $PQRS$ は平行四辺形である。

答え

（証明終）

問題 6

解説

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\vec{c}$
点 R は線分 CP 上にあるので，$CR : RP = s : (1-s)$ とおくと，

$$\overrightarrow{AR} = (1-s)\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AP} = \frac{s}{3}\vec{b} + (1-s)\vec{c} \quad \cdots ①$$

また，点 R は線分 BQ 上にあるので，$BR : RQ = t : (1-t)$ とおくと，

$$\overrightarrow{AR} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AQ} = (1-t)\vec{b} + \frac{3}{4}t\vec{c} \quad \cdots ②$$

$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$ より係数を比較して，

$$\frac{s}{3} = 1 - t \quad \cdots ③, \qquad 1 - s = \frac{3}{4}t \quad \cdots ④$$

③より $t = 1 - \frac{s}{3}$。④に代入して，

$$1 - s = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s \implies \frac{1}{4} = \frac{3}{4}s \implies s = \frac{1}{3}$$

①に代入して，

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

答え

$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

6　仕上げチェック

確認リスト

1. 内分点，外分点，重心の位置ベクトルの公式を正確に覚えているか。
2. 交点の位置ベクトルを求める際に，s と $1-s$ などの係数設定を迷わず行えるか。
3. 平行四辺形などの図形の性質を，位置ベクトルの等式として翻訳できるか。