第 3 講
平面ベクトルの内積 入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- ベクトルの内積の定義とその計算方法
- 成分を用いた内積の計算
- 内積を利用したベクトルの「なす角」の求め方
- ベクトルの垂直条件

2　要点整理

ベクトルのなす角

解説

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の始点を同じ点 O に合わせたとき、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。このとき、$\angle AOB$ の大きさを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「なす角」といい、θ で表す。なす角 θ の範囲は $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

ベクトルの内積の定義

定義

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、そのなす角を θ とするとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を次のように定義する。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

また、$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、なす角を考えず、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。
内積の結果はベクトルではなく「実数（スカラー）」になることに注意すること。

成分による内積

導出

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について、内積を成分で表す公式を導く。
三角形 OAB において、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\angle AOB = \theta$ とする。辺 AB を表すベクトルは $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ である。
余弦定理より、

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$ を代入して整理すると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right)$$

各ベクトルの大きさを成分で表して代入・展開すると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

公式：成分による内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

なす角を求める公式

導出

内積の定義式を $\cos\theta$ について解くと、

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

成分表示を用いると、

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ベクトルの垂直条件と平行条件

垂直条件・平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、

1. **垂直条件**：$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
（成分表示では $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$）
2. **平行条件**：$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

内積の性質

内積の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 k について、次が成り立つ。

1. 交換法則：$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. 分配法則：$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
3. 分配法則：$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. 実数倍：$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
5. 自分自身の内積：$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

ワンポイントアドバイス！

内積の最大の強みは、「幾何学（長さや角度）」と「代数（成分計算）」をつなぐことである。「なす角」や「垂直」という言葉を見たら、迷わず内積を考えよう。

3 例題

問題 1

正三角形 ABC の辺の長さを 2 とする。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

解説

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の始点は共に A である。正三角形であるため、そのなす角は 60° である。また、辺の長さは 2 であるから、$|\overrightarrow{AB}| = 2,\ |\overrightarrow{AC}| = 2$ である。

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ は始点が揃っていない。始点を揃えるために、$\overrightarrow{AB}$ を点 B が始点となるように平行移動する。すると、なす角は $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ となることに注意する。

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}| \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

答え

(1) 2

(2) -2

ワンポイントアドバイス！

なす角を図形から読み取るときは、必ず「始点を揃えたときの角度」を考えること。そのままの図形で見ると、(2) のように角度を間違えやすいので注意せよ。

問題 2

$\vec{a} = (3, 1),\ \vec{b} = (-2, 4)$ のとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

解説

成分による内積の公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ を用いる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times (-2) + 1 \times 4 = -6 + 4 = -2$$

答え

-2

問題 3

$\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (-1, \sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

解説

まず、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と、それぞれの大きさを求める。
内積：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times (-1) + 1 \times \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

大きさ：

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

これらを公式に代入する。

$$\cos\theta = \frac{0}{2 \times 2} = 0$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = 90^\circ$ のときである。
（※内積が 0 になった時点で、垂直すなわち $\theta = 90^\circ$ と判断してもよい）

答え

90°

4 演習問題

問題 1

$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ で、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° のとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

問題 2

1 辺の長さが 1 の正六角形 $ABCDEF$ の中心を O とする。次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$

問題 3

次の 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (3, -2)$

(2) $\vec{a} = (4, -1)$, $\vec{b} = (-2, -8)$

問題 4

次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1 - \sqrt{3},\ 1 + \sqrt{3})$

(2) $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$

問題 5

$\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (4, x - 3)$ が垂直になるように、実数 x の値を定めよ。

問題 6

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ のとき、$|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ の値を求めよ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

内積の定義式を用いる。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\times 4\times\cos 30^\circ = 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

答え

$6\sqrt{3}$

問題 2

解説

正六角形の 1 つの内角は 120° である。中心 O を結ぶと 6 つの正三角形ができる。

(1) 始点 A で揃っている。なす角は $\angle BAF = 120^\circ$。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = 1\times 1\times\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

(2) 始点 A で揃っている。$\angle BAO = 60^\circ$。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = 1\times 1\times\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

(3) $\overrightarrow{ED}$ と $\overrightarrow{AB}$ は平行で同じ向きである。したがってなす角は 0°。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = 1\times 1\times\cos 0^\circ = 1$$

答え

(1)　$-\frac{1}{2}$

(2)　$\frac{1}{2}$

(3)　1

問題 3

解説

成分による計算を行う。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+5\times(-2)=6-10=-4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-2)+(-1)\times(-8)=-8+8=0$

答え

(1) -4

(2) 0

問題 4

解説

(1) 内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(1-\sqrt{3})+1\times(1+\sqrt{3})=2$
大きさ：$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
$|\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=60^\circ$$

(2) 内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+(-1)\times3=-5$
大きさ：$|\vec{a}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\quad|\vec{b}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad\theta=135^\circ$$

答え

(1) 60°

(2) 135°

問題 5

解説

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ が成り立つ。

$$x\times4+2\times(x-3)=0$$

$$4x+2x-6=0\quad\Rightarrow\quad6x=6\quad\Rightarrow\quad x=1$$

答え

$x = 1$

問題 6

解説

ベクトルの大きさの計算では、2 乗して展開するのが基本である。

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 12\,\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

条件の数値を代入する。

$$= 4 \times 2^2 - 12 \times (-1) + 9 \times 3^2 = 16 + 12 + 81 = 109$$

$|2\vec{a} - 3\vec{b}| \geq 0$ であるから、

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{109}$$

答え

$\sqrt{109}$

ワンポイントアドバイス！

問題 6 のように、ベクトルの和や差の「大きさ」を求めるときは、「**まず 2 乗して展開する**」というのが定石中の定石である。ここで内積の値が必要になるため、内積の性質が活躍する。

6　仕上げチェック

確認リスト

- 内積の定義と成分計算の両方を使いこなせるようになったか。
- なす角を求めるときに、始点を合わせる意識を持てているか。
- 「垂直」というキーワードから、即座に「内積が 0」という条件式を作れるか。

お問い合わせや無料コーチングの予約はこちら！