第 2 講
平面ベクトルの成分表示　入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- ベクトルの成分表示の定義を理解する
- 成分を用いたベクトルの演算（加法・減法・実数倍）を習得する
- 成分によるベクトルの大きさの計算ができるようになる
- 2 点の座標を用いてベクトルの成分を求めることができるようになる

2　要点整理

平面ベクトルの成分表示

解説

座標平面上において、原点 $O(0,0)$ を始点とし、点 $A(a_1,a_2)$ を終点とするベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ を考える。
このとき、実数の組 (a_1,a_2) をベクトル $\vec{a}$ の**成分**といい、a_1 を x **成分**、a_2 を y **成分**という。
成分を用いてベクトルを次のように表す。

$$\vec{a}=(a_1,a_2)$$

ベクトルの相等（成分）

解説

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ について、次のことが成り立つ。

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

ベクトルの大きさ

導出

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ は、線分 OA の長さに等しい。原点 $O(0,0)$ と点 $A(a_1, a_2)$ の距離の公式（三平方の定理）より、

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

が導かれる。

ベクトルの成分による演算

導出

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とし、実数を k とするとき、以下の演算が成り立つ。

1. **加法：** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$
2. **減法：** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$
3. **実数倍：** $k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2)$

これらは、図形的なベクトルの合成・分解を座標軸方向（x 方向と y 方向）に分けて考えることで得られる。例えば実数倍 $k\vec{a}$ は、相似の考え方により、x 成分も y 成分もそれぞれ k 倍になる。

2 点間のベクトル

導出

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ について、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を成分で表す。
原点 O を基準とすると、$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ である。
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ であるから、

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

となる。また、その大きさは次のようになる。

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ワンポイントアドバイス！

成分表示の最大のメリットは、図形の問題を「計算」で解けるようになることである。
「**終点の座標 − 始点の座標**」という計算順序を絶対に間違えないようにせよ。逆転させてしまうと、逆ベクトル（向きが反対）になってしまう。

3　例題

問題 1

問題

$\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、次のベクトルを成分で表せ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

解説

(1) 各成分ごとに足し算を行う。

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + (-1),\ -3 + 4) = (1,\ 1)$$

(2) まず各ベクトルを実数倍し、その後に引き算を行う。

$$\begin{aligned} 3\vec{a} &= (3 \times 2,\ 3 \times (-3)) = (6,\ -9) \\ 2\vec{b} &= (2 \times (-1),\ 2 \times 4) = (-2,\ 8) \\ 3\vec{a} - 2\vec{b} &= (6 - (-2),\ -9 - 8) = (8,\ -17) \end{aligned}$$

答え

(1)　$(1,\ 1)$

(2)　$(8,\ -17)$

問題 2

問題

$\vec{a} = (3, 4)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分で表せ。

解説

単位ベクトルとは大きさが 1 のベクトルである。
まず、$\vec{a}$ の大きさを求める。

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ は、$\vec{a}$ をその大きさで割ることで得られる。

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3,\ 4) = \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

答え

$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

問題 3

問題

3 点 $A(1,2)$, $B(4,1)$, $C(5,6)$ を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ の頂点 D の座標を求めよ。

解説

平行四辺形 $ABCD$ において $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ が成り立つ。これと同値な条件として $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ を用いる。
$D(x,y)$ とおくと、

$$\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-2)$$
$$\overrightarrow{BC}=(5-4,\ 6-1)=(1,\ 5)$$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ より、

$$x-1=1,\quad y-2=5$$

$$\therefore\ x=2,\quad y=7$$

答え

$D(2,\ 7)$

4　演習問題

問題 1

$\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(-1,5)$ のとき、次のベクトルを成分で表せ。

(1) $2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-3\vec{b}$

(3) $-3(\vec{a}-2\vec{b})+2(2\vec{a}-\vec{b})$

問題 2

次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(4,-3)$

(2) $\vec{b}=(-5,12)$

(3) $\vec{c}=(\sqrt{2},\sqrt{7})$

問題 3

2 点 $A(2,-1)$, $B(-3,4)$ について、$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めよ。

問題 4

$\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(3,-1)$ のとき、$\vec{c}=(8,9)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

問題 5

$\vec{a}=(x,4)$ の大きさが $2\sqrt{5}$ であるとき、実数 x の値を求めよ。

問題 6

3 点 $A(-1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,4)$ を頂点とする平行四辺形の第 4 の頂点 D の座標を、次の場合について求めよ。

(1) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形になるとき

(2) 四角形 $ACBD$ が平行四辺形になるとき

問題 7

$\vec{a}=(2,1)$ と平行で、大きさが 10 であるベクトル $\vec{b}$ を成分で表せ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

(1)

$$2\vec{a}+\vec{b}=(6,4)+(-1,5)=(5,9)$$

(2)

$$\vec{a}-3\vec{b}=(3,2)-(-3,15)=(6,-13)$$

(3) 展開して整理する。

$$\begin{aligned}&-3(\vec{a}-2\vec{b})+2(2\vec{a}-\vec{b})\\&=-3\vec{a}+6\vec{b}+4\vec{a}-2\vec{b}\\&=\vec{a}+4\vec{b}\\&=(3,2)+(-4,20)=(-1,22)\end{aligned}$$

答え

(1)　$(5,\ 9)$

(2)　$(6,\ -13)$

(3)　$(-1,\ 22)$

問題 2

解説

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
(2) $|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$
(3) $|\vec{c}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$

答え

(1)　5

(2)　13

(3)　3

問題 3

解説

$$\overrightarrow{AB} = (-3-2,\ 4-(-1)) = (-5,\ 5)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

答え

成分：$(-5,\ 5)$　大きさ：$5\sqrt{2}$

問題 4

解説

$(8,9) = s(1,2)+t(3,-1)$ とおく。
成分ごとに連立方程式を立てる。

$$\begin{cases} s+3t=8 & \cdots ① \\ 2s-t=9 & \cdots ② \end{cases}$$

②より $t=2s-9$。これを①に代入する。

$$s+3(2s-9)=8 \implies 7s-27=8 \implies 7s=35 \implies s=5$$

$$t=2\times 5-9=1$$

答え

$\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$

ワンポイントアドバイス！

ベクトルの分解 $s\vec{a}+t\vec{b}$ は、連立方程式を解く問題に帰着する。成分表示にすることで、幾何学的な問題が代数学（計算）の問題に変わる瞬間である。この手法はこれからも繰り返し登場するので、手順を確実に身につけよ。

問題 5

解説

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+4^2} = 2\sqrt{5}$$

両辺を 2 乗して、

$$x^2+16=20 \implies x^2=4 \implies x=\pm 2$$

答え

$x = \pm 2$

問題 6

解説

$D(x, y)$ とおく。
(1) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AB} = (3-(-1),\ 2-1) = (4,\ 1)$
$\overrightarrow{DC} = (-1-x,\ 1-y)$ より、

$$-1-x = 4 \implies x = -5, \quad 1-y = 1 \implies y = 0$$

よって $D(-5, 0)$（別解：$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ を使うと $D(-2, 3)$、頂点順序の違いに注意）
ここでは $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ を用いる。$\overrightarrow{BC} = (2-3,\ 4-2) = (-1,\ 2)$ $\overrightarrow{AD} = (x-(-1),\ y-1) = (x+1,\ y-1)$

$$x+1 = -1 \implies x = -2, \quad y-1 = 2 \implies y = 3$$

(2) 四角形 $ACBD$ が平行四辺形 $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{AC} = (2-(-1),\ 4-1) = (3,\ 3)$
$\overrightarrow{DB} = (3-x,\ 2-y)$ より、

$$3-x = 3 \implies x = 0, \quad 2-y = 3 \implies y = -1$$

答え

(1) $D(-2,\ 3)$

(2) $D(0,\ -1)$

問題 7

解説

$\vec{b}$ は $\vec{a} = (2, 1)$ と平行なので $\vec{b} = k\vec{a}$ とおける（$k \neq 0$）。

$$\vec{b} = (2k,\ k)$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(2k)^2 + k^2} = \sqrt{5k^2} = \sqrt{5}\,|k| = 10$$

$$|k| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$k = \pm 2\sqrt{5}$$

よって、
$$\vec{b} = \pm 2\sqrt{5}(2, 1) = \pm(4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$$

答え

$(4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ および $(-4\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$

6　仕上げチェック

この講のまとめ

- ベクトルの成分表示は、座標と同様に (x, y) で表す。
- 大きさは三平方の定理と同じ形、$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ で計算できる。
- 加法・減法・実数倍は、成分ごとに計算すればよい。
- 2 点 A, B があるとき、$\overrightarrow{AB} = ($終点 $B -$ 始点 $A)$ である。
- ベクトルの分解 $s\vec{a} + t\vec{b}$ は連立方程式に帰着する。

チェックリスト

次の問いに答えられるか確認しよう。

1. $\vec{a} = (a_1, a_2)$ の大きさの公式を書けるか？
2. ベクトルの加法・減法・実数倍を成分で計算できるか？
3. 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ について $\overrightarrow{AB}$ の成分を正しく求められるか？
4. $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{c}$ となる s, t を連立方程式で求められるか？
5. 平行四辺形の第 4 頂点をベクトルの条件から求められるか？

お問い合わせや無料コーチングの予約はこちら！