第 10 講
放物線 入門

1　この講で学ぶこと

学習目標

- 2 次曲線の 1 つである「放物線」の幾何学的な定義を理解する
- 放物線の標準形（方程式）と，焦点・準線の関係を把握する
- 条件から放物線の方程式を決定できるようになる
- 軸の向きによる方程式の違い（x 軸方向と y 軸方向）を使い分けられる

2　要点整理

放物線の定義

解説

平面上において，ある定点 F と，点 F を通らないある定直線 l からの距離が等しい点 P の軌跡を**放物線**という。

- 定点 F：**焦点（しょうてん）**
- 定直線 l：**準線（じゅんせん）**
- 焦点を通り準線に垂直な直線：**軸**
- 放物線と軸の交点：**頂点**

放物線の標準形（軸が x 軸の場合）

導出

焦点 $F(p, 0)$，準線 $x = -p$ として，放物線上の点 $P(x, y)$ について考える。点 $H(-p, y)$ を P から準線に下ろした垂線の足とすると，放物線の定義 $PF = PH$ より，

$$PF^2 = PH^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

展開して整理すると，

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

焦点の座標は $(p, 0)$，準線の方程式は $x = -p$ である。

ワンポイントアドバイス！

数 I で学んだ $y = ax^2$ は「軸が y 軸」の放物線である。数学 C では横向き（軸が x 軸）の $y^2 = 4px$ を基本として扱う。方程式から焦点を求めるには，「**x の係数を 4 で割る**」と p が出てくると覚えておこう。

放物線の標準形（軸が y 軸の場合）

解説

原点を頂点とし，軸が y 軸である放物線の方程式は，

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

焦点の座標は $(0, p)$，準線の方程式は $y = -p$ である。
（数 I の $y = ax^2$ において $a = \dfrac{1}{4p}$ とおいたものと同じ形である。）

3　例題

問題 1

問題

放物線 $y^2 = 12x$ の焦点の座標と，準線の方程式を求めよ。

解説

$y^2 = 4px$ と比較して，

$$4p = 12 \implies p = 3$$

焦点は $(p, 0) = (3, 0)$，準線は $x = -p = -3$。

答え

焦点：$(3, 0)$

準線：$x = -3$

問題 2

問題

焦点が $(0, -2)$，準線が $y = 2$ である放物線の方程式を求めよ。

解説

焦点が y 軸上にあり，準線が x 軸に平行であるから，軸は y 軸。よって $x^2 = 4py$ の形。

焦点 $(0, p) = (0, -2)$ より $p = -2$。代入すると，

$$x^2 = 4 \times (-2) \times y = -8y$$

答え

$x^2 = -8y$

問題 3

問題

頂点が原点，軸が x 軸であり，点 $(2, -4)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

解説

求める方程式は $y^2 = 4px$ の形。点 $(2, -4)$ を代入する。

$$(-4)^2 = 4p \times 2 \implies 16 = 8p \implies p = 2$$

よって $y^2 = 8x$。

答え

$y^2 = 8x$

4 演習問題

問題 1

次の放物線の焦点の座標と，準線の方程式を求めよ。

(1) $y^2 = 8x$

(2) $y^2 = -4x$

(3) $y^2 = x$

問題 2

次の放物線の焦点の座標と，準線の方程式を求めよ。

(1) $x^2 = 16y$

(2) $x^2 = -12y$

問題 3

次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が $(4, 0)$，準線が $x = -4$

(2) 焦点が $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，準線が $x = \frac{1}{2}$

(3) 焦点が $(0, 3)$，準線が $y = -3$

問題 4

頂点が原点，軸が x 軸であり，点 $(3, 6)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

問題 5

頂点が原点，軸が y 軸であり，点 $(-4, 2)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

問題 6

原点を頂点とする放物線がある。その焦点 F が x 軸の負の部分にあり，放物線上の点 $P(-2, 4)$ から準線に下ろした垂線の長さが 4 であるという。この放物線の方程式を求めよ。

5　演習問題の解答・解説

問題 1

解説

$y^2 = 4px$ の形から，焦点は $(p, 0)$，準線は $x = -p$。

(1)　$4p = 8 \implies p = 2$

(2)　$4p = -4 \implies p = -1$

(3)　$4p = 1 \implies p = \dfrac{1}{4}$

答え

(1)　焦点 $(2, 0)$，　準線 $x = -2$

(2)　焦点 $(-1, 0)$，　準線 $x = 1$

(3)　焦点 $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$，　準線 $x = -\dfrac{1}{4}$

問題 2

解説

$x^2 = 4py$ の形から，焦点は $(0, p)$，準線は $y = -p$。

(1)　$4p = 16 \implies p = 4$

(2)　$4p = -12 \implies p = -3$

答え

(1)　焦点 $(0, 4)$，　準線 $y = -4$

(2)　焦点 $(0, -3)$，　準線 $y = 3$

問題 3

解説

(1)　焦点が x 軸上 $\Rightarrow y^2 = 4px$ の形。$p = 4$ より $y^2 = 16x$。

(2)　焦点が x 軸上 $\Rightarrow y^2 = 4px$ の形。$p = -\dfrac{1}{2}$ より $y^2 = -2x$。

(3)　焦点が y 軸上 $\Rightarrow x^2 = 4py$ の形。$p = 3$ より $x^2 = 12y$。

答え

(1) $y^2 = 16x$

(2) $y^2 = -2x$

(3) $x^2 = 12y$

ワンポイントアドバイス！

方程式を作るときは，まず「焦点がどちらの軸に乗っているか」を確認すること。x 軸上に焦点があれば $y^2 = \cdots$，y 軸上に焦点があれば $x^2 = \cdots$ から始まる。

問題 4

解説

$y^2 = 4px$ とおく。点 $(3, 6)$ を代入する。

$$6^2 = 4p \times 3 \implies 36 = 12p \implies p = 3$$

答え

$y^2 = 12x$

問題 5

解説

$x^2 = 4py$ とおく。点 $(-4, 2)$ を代入する。

$$(-4)^2 = 4p \times 2 \implies 16 = 8p \implies p = 2$$

答え

$x^2 = 8y$

問題 6

解説

頂点が原点，焦点が x 軸上にあるから $y^2 = 4px$ の形。焦点が負の部分にあるので $p < 0$。

準線は $x = -p$。点 $P(-2, 4)$ から準線までの距離が 4 であるから，

$$|-2-(-p)| = 4 \implies |p-2| = 4$$

$$p - 2 = \pm 4 \implies p = 6 \text{ または } p = -2$$

条件 $p < 0$ より $p = -2$。よって,

$$y^2 = 4 \times (-2) \times x = -8x$$

答え

$y^2 = -8x$

6 仕上げチェック

確認リスト

1. 放物線の定義（焦点と準線からの距離が等しい点の軌跡）を理解したか。
2. $y^2 = 4px$ の形から焦点と準線を即座に求められるようになったか。
3. 焦点が x 軸上か y 軸上かによって，方程式の形（y^2 始まりか x^2 始まりか）を使い分けられるか。

お問い合わせや無料コーチングの予約はこちら！