第 1 講

平面ベクトルの基本と演算 入門

1 この講で学ぶこと

学習目標

- ベクトルの定義（大きさと向き）
- ベクトルの加法・減法・実数倍
- ベクトルの相等と逆ベクトル、零ベクトル

2 要点整理

ベクトルの定義

平面上で，向きと大きさの両方が指定された量を**ベクトル**という。点 A から点 B に向かうベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書き，点 A を**始点**，点 B を**終点**という。また，1 つの文字を用いて $\vec{a}$ のように表すこともある。

ベクトルの大きさ

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の長さを，そのベクトルの**大きさ**（または長さ）といい，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ と表す。1 文字で表されたベクトル $\vec{a}$ の大きさは $|\vec{a}|$ と書く。

ベクトルの相等

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の向きが同じで，かつ大きさが等しいとき，$\vec{a}=\vec{b}$ と表す。ベクトルは「向き」と「大きさ」だけで決まるため，始点の位置が異なっていても，平行移動して重ね合わせることができれば同じベクトルであるとみなす。

逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対であるベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ と表す。特に，$\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルは $\overrightarrow{BA}$ であり，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ が成り立つ。

また，始点と終点が一致するベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{0}$ で表す。零ベクトルの大きさは 0 であり，その向きは考えないものとする。

ベクトルの加法

導出

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ を次のように定める。点 A から $\vec{a}$ をとって点 B に至り，点 B からさらに $\vec{b}$ をとって点 C に至るとき，点 A から点 C に直接向かうベクトルを和 $\vec{a}+\vec{b}$ とする。すなわち，

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

が成り立つ。これは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形を作成したとき，その対角線として求める方法と同じである。

ベクトルの減法

導出

ベクトル $\vec{a}$ からベクトル $\vec{b}$ を引く演算 $\vec{a}-\vec{b}$ は，$\vec{a}+(-\vec{b})$，すなわち $\vec{a}$ に $\vec{b}$ の逆ベクトルを加えることと定義される。共通の始点 O をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

となる。これは，$\vec{b}$ の終点 B から $\vec{a}$ の終点 A へ向かうベクトルである。

ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ について，ベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める。

1. $k>0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル。
2. $k<0$ のとき，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル。
3. $k=0$ または $\vec{a}=\vec{0}$ のとき，$k\vec{a}=\vec{0}$。

ワンポイントアドバイス！

ベクトルの減法 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ は非常に重要である。「後ろ（引く側）の終点から前（引かれる側）の終点へ引く」と視覚的に覚えるのも良いが，計算上は「終点 A の位置ベクトルから始点 B の位置ベクトルを引く」という感覚を持つことが，後の座標や成分計算で役立つ。

3 例題

問題 1

正六角形 $ABCDEF$ の中心を O とする。$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AO}$
(2) $\overrightarrow{BC}$
(3) $\overrightarrow{BD}$

解説

(1) 正六角形の対角線の交点 O について，四角形 $ABOF$ は平行四辺形となる。したがって，$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ が成り立つ。よって，$\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b}$ である。

(2) 正六角形の性質より，BC は AO と平行で，大きさが等しく，向きも同じである。したがって，$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}$ である。(1) の結果より，$\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ となる。

(3) $\overrightarrow{BD}$ を始点 B から C を経由して D へ行く経路で考える。

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

ここで，$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF} = \vec{b}$ である（平行移動による相等）。また，(2) より $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ である。これらを加えると，

$$\overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

となる。

答え

(1) $\vec{a} + \vec{b}$
(2) $\vec{a} + \vec{b}$
(3) $\vec{a} + 2\vec{b}$

問題 2

次のベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

$$2(\vec{a} - \vec{x}) + 3(\vec{b} + \vec{x}) = \vec{a}$$

解説

通常の文字式（代数方程式）と同じように，$\vec{x}$ について整理する。まず，左辺を展開する。

$$2\vec{a} - 2\vec{x} + 3\vec{b} + 3\vec{x} = \vec{a}$$

次に，ベクトル $\vec{x}$ を含む項を左辺に，それ以外を右辺にまとめる。

$$(-2+3)\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\vec{x} = -\vec{a} - 3\vec{b}$$

答え

$\vec{x} = -\vec{a} - 3\vec{b}$

4　演習問題

問題 1

正六角形 $ABCDEF$ において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{CD}$

(2) $\overrightarrow{DE}$

(3) $\overrightarrow{AD}$

(4) $\overrightarrow{CE}$

問題 2

次の計算をせよ。

(1) $3\vec{a} + 2\vec{b} - (2\vec{a} - \vec{b})$

(2) $4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(2\vec{a} + \vec{b})$

(3) $\dfrac{1}{2}(\vec{a} + 3\vec{b}) - \dfrac{3}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

問題 3

次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

$$3(\vec{x} - \vec{a}) = 2(\vec{x} + \vec{b}) - \vec{a}$$

問題 4

四角形 $ABCD$ において，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

問題 5

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル（大きさが 1 のベクトル）を $\vec{a}$ を用いて表せ。

問題 6

平行四辺形 $ABCD$ において，対角線の交点を O とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OC}$

(2) $\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{BC}$

5 演習問題の解答・解説

問題 1

解説

正六角形の中心を O とすると，$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ などの関係がある。

(1) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$。ここで $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ なので，$\vec{b} - \vec{a}$。

(2) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$。

(3) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{BC} = 2\vec{b}$。

(4) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\vec{b} - \vec{a}) + (-\vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{a}$。

答え

(1) $\vec{b} - \vec{a}$

(2) $-\vec{a}$

(3) $2\vec{b}$

(4) $\vec{b} - 2\vec{a}$

ワンポイントアドバイス！

正六角形の問題では，中心 O を考えるのが鉄則である。全ての基本ベクトルは中心へ向かうベクトルか，辺に沿ったベクトルの組み合わせで表現できる。

問題 2

答え

(1) $\vec{a} + 3\vec{b}$

(2) $10\vec{a} - 5\vec{b}$

(3) $-\vec{a} + 3\vec{b}$

問題 3

解説

$$3\vec{x} - 3\vec{a} = 2\vec{x} + 2\vec{b} - \vec{a}$$
$$3\vec{x} - 2\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

答え

$\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

問題 4

解説

ベクトルの加法の定義 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ を順に用いる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{AA} = \vec{0}
\end{aligned}$$

よって等式は成り立つ。（証明終）

問題 5

解説

ベクトル $\vec{a}$ の大きさを 1 にするには，自分自身の大きさ $|\vec{a}|$ で割ればよい。向きは同じなので，正の実数倍とする。

答え

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ （または $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$）

問題 6

解説

(1) 平行四辺形の対角線は互いの中点で交わるため，$\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OA}$ と逆向きで大きさが等しい。よって $-\vec{a}$。

(2) 始点を O に揃えて，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$。

(3) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$。

答え

(1)　$-\vec{a}$

(2)　$\vec{b} - \vec{a}$

(3)　$-\vec{a} - \vec{b}$

6　仕上げチェック

まとめ

- ベクトルの**加法**は，図形的には「つなげる」か「平行四辺形を作る」ことである。
- ベクトルの**減法**は，始点を揃えたとき「引き算の順序と逆の向きのベクトル」になる($\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$)。
- ベクトルの計算は，実数倍の分配法則などが成り立つため，通常の文字式と同様に扱える。

お問い合わせや無料コーチングの予約はこちら！
